Lógica Proposicional

Samir Gorsky

Resumo

O presente texto é parte de um trabalho que apresenta tópicos relacionados à disciplina de Lógica Formal tais como: história da lógica, lógica sentencial, lógica de primeira ordem, etc.

Palavras-chaves: lógica, sistemas formais.

Sumário

1 Introdução

2 Lógica Proposicional

A lógica Proposicional pode também ser chamada de cálculo proposicional, cálculo sentencial ou lógica sentencial.

O princípio básico da lógica proposicional é a crença que proposições podem ser combinadas das mais diversas maneiras. Além disso, sustenta-se também que existem diversas maneiras de se definir operações sobre proposições.

Para nossos interesses aqui, iremos nos ocupar apenas das combinações funcional-veritativas[1] entre proposições. Nesses casos, os valores de verdade das fórmulas (sentenciais) podem ser determinados através de certas funções definidas sobre seus componentes (em termos de valores de verdade).

3 Linguagem Formal para a Lógica Proposicional (LP) - sintaxe

3.1 Alfabeto da Linguagem Formal para a Lógica Proposicional

A linguagem Proposicional possui os seguintes símbolos: as variáveis sentenciais (*p, q, r... etc.*), as constantes '$\bot$' e '$\top$', a negação '$\neg$' e os conectivos '$\rightarrow$', '$\wedge$', '$\vee$', e '$\leftrightarrow$'. Eventualmente usaremos os parênteses para melhorar a leitura das fórmulas. Definimos a linguagem da lógica a partir de conectivos e/ou operadores. Os operadores possuem aridade. A aridade indica a quantidade de elementos que devem estar no escopo do operador ou conectivo. As constantes são conectivos 0-ários ($\bot$ e $\top$). A negação $\neg$ é um operador unário. Os demais conectivos ($\rightarrow$, $\wedge$, $\vee$, $\leftrightarrow$) são binários.

Em nosso contexto, consideramos que o conjunto total de variáveis sentenciais é enumerável. Caso seja necessário, utilizaremos subíndices para diferenciar as variáveis de tal forma que nosso conjunto Var_{LP} de variáveis sentenciais seja o seguinte $Var_{LP} = \{p, q, r, s, t, u, v, p_1, q_1, r_1, s_1, t_1, u_1, v_1, p_2, q_2, r_2, s_2, t_2, u_2, v_2, etc...\}$.

3.2 Definição de fórmula bem formada

Definição do conjunto $\mathbf{For}_{LP}$ Chamaremos de fórmulas bem formadas ou simplismente fórmula às sequências de símbolos que obedecem aos itens abaixo:

1) variáveis proposicionais isoladas são fórmulas;
2) se α é fórmula, então $\neg\alpha$ é uma fórmula e
3) se α e β são fórmulas então $\alpha\#\beta$ é fórmula (onde $\# \in \{\rightarrow, \wedge, \vee, \leftrightarrow\}$).
4) são válidas apenas as fórmulas que sigam as regras 1, 2, 3 e 4.

[1] verofuncionalidade

Em geral, os seguintes símbolos: $\rightarrow$, $\wedge$, $\vee$, $\leftrightarrow$, $\perp$, $\top$ podem ser definidos a partir de um conjunto adequado de conectivos (obs: Os símbolos α, β, γ... serão usados como metavariáveis)[2]

Uma única variável proposicional é uma fórmula e é chamada de fórmulas atômicas ou átomos.

Outros símbolos

Por convenção não utilizaremos parênteses para fórmulas atômicas. Os conectivos contém força decrescente de prioridade na seguinte ordem $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$.

Esquema de eliminação e restauração de parênteses em fórmulas sentenciais:

i) se o conectivo é $\neg$ e este precede uma fórmula α, restaura os parênteses à esquerda e à direita $(\neg\alpha)$.

ii) se o símbolo # é um conectivo binário precedido pela fórmula α e seguido pela fórmula β, restaure os parênteses à esquerda e à direita de tal forma que resulte $(\alpha\#\beta)$

iii) se nem i) nem ii) valem, ignore temporariamente o conectivo e encontre a ocorrência mais à esquerda do conectivo mais forte que não foi tratado ainda e repita i) e ii) para aquele conectivo.

Exemplos:

1. $\alpha \leftrightarrow (\neg\beta) \vee \gamma \rightarrow \alpha$

$\alpha \leftrightarrow ((\neg\beta) \vee \gamma) \rightarrow \alpha$

$\alpha \leftrightarrow (((\neg\beta) \vee \gamma) \rightarrow \alpha)$

$(\alpha \leftrightarrow (((\neg\beta) \vee \gamma) \rightarrow \alpha)$

2. $\alpha \rightarrow \neg\beta \rightarrow \gamma$

3. $\beta \rightarrow \neg\neg\alpha$

4. $\alpha \vee \neg(\beta \rightarrow \alpha \vee \beta)$

Obs. As fórmulas α, β e γ são fórmulas que já estão normatizadas em relação aos parênteses.

Exercício 1. *Elimine os parênteses das fórmulas abaixo (o máximo possível).*

a) $((\beta \rightarrow (\neg\alpha)) \wedge \gamma)$

b) $((\beta \vee (\neg\gamma)) \vee (\alpha \wedge \beta))$

c) $((\neg(\neg(\neg(\beta \vee \gamma)))) \leftrightarrow (\beta \leftrightarrow \gamma)$

4 Semântica da lógica proposicional

4.1 Negação

A negação (ou complemento lógico) é uma das mais simples operações sobre proposições. Em geral o símbolo '$\neg$' é usado como negação para uma proposição 'p' ou uma fórmula 'α'. desta forma '$\neg p$' e '$\neg\alpha$ significam, respectivamente, 'não-p' e 'não-α.

[2]Por exemplo: se os concectivos primitivos são $\neg$ e $\rightarrow$, então D1 $\alpha\wedge\beta$ é a abreviação de $\neg(\alpha \rightarrow \neg\beta)$. D2 $(\alpha \vee \beta)$ é a abreviação de $\neg\alpha \rightarrow \beta$. D3 $\alpha \leftrightarrow \beta$ é a abreviação de $(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$. D4 $\perp$ é a abreviação de $\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$. D5 $\top$ é a abreviação de $\alpha \vee \neg\alpha$.

Em geral, a negação de uma sentença ou proposição na linguagem natural é formada pelo uso do "não". Assim, a negação de "chove" é "não chove" e de "a porta está aberta" é "a porta não está aberta". O par formado por uma sentença ou proposição e a negação desta sentença ou proposição é chamado de "contraditório". A sentença "não chove" é a contraditória de "chove" e a sentença "a porta está aberta" é a contraditória de "a porta não está aberta"[3].

Também podemos expressas a contraditória de uma proposição afirmativa antepondo-lhe a expressão "é falso que" ou "não é o caso que". Por exemplo: a negação de "Platão foi um filósofo grego" é "não é o caso que Platão foi um filósofo grego"; a negação de "Leibniz era um realista" é "é falso que Leibniz era um realista".

O símbolo $\neg$ representa a negação. Assim, se p_1 significa "os racionalistas são contratualistas" a fórmula $\neg p_1$ significa "não é o caso que os racionalistas são contratualistas" ou "é falso que os racionalistas são contratualistas" ou "os racionalistas não são contratualistas".

Exemplos:

Kant não era prussiano.

Kant não era italiano.

Aristóteles não era ateniense.

Aristóteles não era estagirita.

Exercício 2. *Negação.*

a. Cite mais três exemplos de pares de sentenças contraditórias.

b. Apresente três exemplos diferentes de sentenças negadas.

A função veritativa que caracteriza a negação pode ser apresentada a partir da seguinte tabela:

α	$\neg\alpha$
V	F
F	V

Tabela 1: Tabela de verdade para a negação

Disjunção

Usamos a palavra "ou" entre duas proposições para formar uma disjunção. Por exemplo: "o objeto é quadrado ou o objeto é circular"; "eu fui ao cinema ou eu fui ao teatro"; "não é verdade que os materialistas são confusos ou este livro é interessante".

O símbolo $\vee$ representa a disjunção. Assim, se q_1 significa "as dívidas ultrapassaram 20%" e q_2 significa "a taxas de juros estão caindo", então a fórmula $q_1 \vee q_2$ significa "as dívidas ultrapassaram 20% ou as taxas de juros estão caindo".

Exemplos:

Kant era prussiano ou Kant era italiano.

[3]Proposições são portadores de valor de verdade

Aristóteles era ateniense ou aristóteles não era estagirita.

Platão escreveu Teeteto ou Platão foi aluno de Sócrates.

Exercício 3. *Disjunção.*

a. Se q_1 *significa "a porta é branca" e* q_2 *significa "a fechadura é verde", então o que* $q_1 \vee q_2$ *significa?*

b. Formalize as seguintes proposições:

A caixas são grandes ou os livros são pequenos.

Eu saí tarde ou meu relógio está quebrado.

Obs: a palavra "ou" é ambígua e pode indicar que uma das proposições ou ambas valem ou que apenas e somente uma das proposições valem. O segundo caso é chamado de "ou exclusivo". O símbolo $\vee$ é usado na primeira acepção, ou seja, é o "ou inclusivo" onde uma ou ambas as proposições valem.

Exemplos do uso exclusivo do "ou" (simbolizado por '$\veebar$'):

Uma mãe diz ao filho que ele pode comer um biscoito ou uma fatia de torta. Provavelmente ela quer dizer que o filho não pode comer ambas as coisas.

Uma pessoa recebe um brinde de uma empresa e eles informam que essa pessoa pode receber uma assinatura de uma revista ou um boné como brinde.

Exemplo de um argumento com disjunção e negação.

Henrique tem um chapéu azul ou Henrique tem um chapéu vermelho.

Henrique não tem um chapéu azul.

Portanto, Henrique tem um chapéu vermelho.

A estrutura do argumento acima é conhecido como *silogismo disjuntivo.*

Tabela de verdade para a disjunção:

α	β	$\alpha \vee \beta$
V	V	V
F	V	V
V	F	V
F	F	F

Tabela 2: Tabela de verdade para a disjunção

Conjunção

A conjunção se constitui de duas proposições intercaladas com a palavra "e". Por exemplo "Platão é racionalista e Platão é idealista" é uma conjunção.

O símbolo $\wedge$ representa "e". Assim, se r_1 significa "Kant nasceu no século XVIII" e r_2 significa "Kant era idealista", então $r_1 \wedge r_2$ significa "Kant nasceu no século XVIII e Kant era idealista".

Tabela de verdade para a conjunção:

Implicação

A tabela que representa a função veritativa para implicação é a seguinte:

α	β	$\alpha \land \beta$
V	V	V
F	V	F
V	F	F
F	F	F

Tabela 3: Tabela de verdade para a conjunção

α	β	$\alpha \to \beta$
V	V	V
F	V	V
V	F	F
F	F	V

Tabela 4: Tabela de verdade para a implicação

Equivalência ou Bi-implicação
A tabela que representa a função veritativa para bi-implicação é a seguinte:

α	β	$\alpha \leftrightarrow \beta$
V	V	V
F	V	F
V	F	F
F	F	V

Tabela 5: Tabela de verdade para a bi-implicação

Exercício 4. *i) Determine o valor de verdade das seguintes fórmulas:*
a) $(\neg p \lor q) \to r$
b) $((p \leftrightarrow q) \to (\neg p \land q)$
ii) Faça a tabela de verdade para o uso do 'ou' exclusivo.

4.2 Interpretação e Validade de Argumentos

Definição 1 (Interpretação - Lógica proposicional)**.** *Uma interpretação ou um mundo possível para ('parte da' ou 'toda') a lógica proposicional é uma atribuição de valores de verdade (V ou F)*[4] *para alguma ou todas as letras ou variáveis sentenciais (*p*,* p_1*,* p_2*,* q*, etc.).*

[4] É comum se encontrar também os símbolos 1 ou T para verdadeiro e 0 para falso.

Os conectivos da lógica são verofuncionais. Isso significa que o valor de verdade (verdadeiro e falso) das fórmulas complexas dependem apenas dos valores de verdade dos componentes que a forma e que os conectivos são funções sobre o conjunto de valores de verdade.

Definição 2 (Forma de argumento logicamente válida)**.** *A forma de um argumento é logicamente válida sse em qualquer instância dessa forma de argumento na qual as premissas são verdadeiras, a conclusão é verdadeira*

As instâncias da forma de argumento são os casos em que sentenças específicas são colocadas nos lugares das (ou variáveis) letras sentenciais.

Portanto, para se analisar a validade de argumentos não é necessário fazer considerações sobre as instâncias do argumento, mas sim apenas sobre as interpretações ou mundos possíveis.

Uma interpretação ou mundo pode ser estendido a partir dos valores de verdade atribuídos às variáveis proposicionais para todas as fórmulas. Isso se dá através de uma definição recursiva sobre a complexidade das fórmulas. O valor de verdade verdadeiro pode também ser representado pelo valor 1 e o valor de verdade falso pelo 0. Nesse caso, em termos menos formais, o valor de verdade da negação é oposto ao valor do que é negado, o valor da implicação é o valor máximo entre o valor da negação do primeiro componente e o valor do segundo, o valor da conjunção é o valor mínimo que foi atribuído aos seus componentes, etc.

Chamaremos de 'martelo semântico' o símbolo '$\vDash$'. Escrevemos '$\mathcal{V} \vDash \alpha$' para indicar que '$\alpha$' é verdadeira no modelo $\mathcal{V}$ (o modelo $\mathcal{V}$ força α).

Podemos definir as condições de verdade em relação a um modelo da seguinte forma:

1) $\mathcal{V} \vDash \alpha$ sse $\mathcal{V}$ atribui o valor V à α.
2) $\mathcal{V} \vDash \neg\alpha$ sse não é o caso que $\mathcal{V} \vDash \alpha$ (ou $\mathcal{V} \nvDash \alpha$)
3) $\mathcal{V} \vDash \neg\alpha \rightarrow \beta$ sse se $\mathcal{V} \vDash \alpha$, então $\mathcal{V} \vDash \beta$
4) $\mathcal{V} \vDash \alpha \wedge \beta$ sse $\mathcal{V} \vDash \alpha$ e $\mathcal{V} \vDash \beta$
5) $\mathcal{V} \vDash \alpha \vee \beta$ sse $\mathcal{V} \vDash \alpha$ ou $\mathcal{V} \vDash \beta$
6) $\mathcal{V} \vDash \alpha \leftrightarrow \beta$ sse $\mathcal{V} \vDash \alpha = \mathcal{V} \vDash \beta$

Definição 3 (Consequência semântica)**.** *Diremos que β é consequência*[5] *semântica de um conjunto de fórmulas $\Gamma = \{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \ldots,\ \alpha_n\}$ sse todo modelo que atribui valor de verdade verdadeiro para as premissas, atribui valor de verdade verdadeiro para a conclusão α.*

O método básico de decisão semântica para a lógica proposicional se dá através das tabelas de verdade (proposto por Post[6] em 1921). Outras ferramentas importantes para esse cálculo é o teorema de Lindenbaum e o teorema de compacidade.

No sentido mais intuitivo possível, considera-se que a interpretação de um conjunto de proposições seja um 'mundo possível' no qual cada proposições é *verdadeira* ou

[5](conclusão, implicação, etc.)
[6]Emil Leon Post

falsa. Essa interpretação intuitiva será substituída por um conceito matemático mais definido que chamaremos de *modelo*. Toma-se então uma função v que associa, para cada variável proposicional (ou proposição atômica) p um valor de verdade verdadeiro (*true*, T, 1, V, etc.) ou falso (*false*, F, O, etc.). No sentido mais simples possível, um modelo é um subconjunto S de **For**. Assim, quando $p \in S$, p é verdadeiro e quando $p \notin S$, p é falso (para $p \in$ **For** e $S \subseteq$**For**)

Uma vez que o modelo para um conjunto de fórmulas é um subconjunto deste, o conjunto de todos os modelos possíveis para **For** é designado por $2^{|For|}$. Uma vez que modelos são conjuntos é natural pensarmos certas relações e operações entre modelos a saber: $S_1 \subset S_2$, **For** $- S_1$, $S_5 \cap S_8$, etc. Além disso, uma vez definida uma família de modelos indexicados poderemos requisitar a intersecção $\bigcap_{i \in I} S_i$ e a disjunção $\bigcup_{i \in I} S_i$ destes. Dois modelos são distinguidos: o vazio $\emptyset$ e o próprio conjunto **For**.

Seja v uma função veritativa n-ária (uma função com n "entradas"). Os valores de entrada e saída desta função são valores de verdade (em geral V e F). Cada fórmula contendo n variáveis sentenciais distintas determinará uma função veritativa n-ária.

Quantas atribuições de valores de verdade diferentes são possíveis para um conjunto de n variáveis?

Resp.: Se ocorrem n variáveis diferentes na fórmula, então existirá 2^n possíveis atribuições diferentes de valores de verdade para as n variáveis (portanto, haverá 2^n linhas na tabela de verdade da fórmula).

Dizemos que uma fórmula com n variáveis sentenciais é uma tautologia se ela determina uma função veritativa n-ária a partir dos modelos de tabela acima que tenha como saída apenas o valor V. Portanto, uma fórmula é uma tautologia se, e somente se ('sse' daqui por diante) sua tabela de verdade tenha apenas o valor V como saída.

Exemplos de tautologia

1. $p \vee \neg p$ (terceiro excluído)
2. $q_1 \leftrightarrow \neg\neg q_1$
3. $r \rightarrow (r \vee q_{12})$

Definição 4 (Consequência Semântica)**.** *Dizemos que β é uma consequência semântica de α sse toda valoração para todas as variáveis sentenciais que ocorrem em α e β que fazem α ser verdadeira, também resulta em verdade para β. Usaremos o seguinte símbolo $\models$ (martelo semântico) para indicar a relação de consequência semântica da seguinte forma: $\alpha \models \beta$ denota que β é consequência lógica de α.*

Exemplo 1. *$\alpha \wedge \beta \models \beta$ denota α é consequência lógica de $\alpha \wedge \beta$.*

5 Métodos de prova

Problemas com o conceito de demonstração (justificativa):

1) ausência de fundação (descenço infinito)

2) circularidade.

Esses problemas também valem para o conceito de definição.

Fundamentação:
Verdades auto-evidentes
a) O todo é maior do que a parte.
b) Coisas iguais a uma terceira são iguais entre si.
Sistema axiomático: verdades fundamentais + regras de inferência
Tablôs semânticos: mais rápido do que a tabela de verdade.
Dedução natural: regras de inferência.

6 Tableaux para a Lógica Proposicional

Definição 5 (Tableau analítico)**.** *Um tableau analítico para α é uma árvore diádica, cujos pontos são (ocorrências de) fórmulas, e que é construída como se segue (ver p. 28 do livro Smullyan, R. Lógica de primeira ordem).*

For é o conjunto de todas as fórmulas da linguagem proposicional.
Seja α, $\beta \in$ **For** e $\Gamma \subseteq$ **For**
Obs: α, β e Γ são meta-veriáveis para fórmulas e conjuntos de fórmulas.

Definição 6. *Por uma interpretação de uma fórmula α entende-se uma atribuição de valores de verdade a todas as variáveis que ocorrem em α.*

Definição 7. *uma valoração f_v de **For** é uma valoração booleana se, para quaisquer α, $\beta \in$ **For**, valem as seguintes condições.*

C1: Uma fórmula $\neg\alpha$ recebe valor V se α recebe valor F, e recebe F se α recebe valor V.

C2: Uma fórmula $\alpha \wedge \beta$ recebe valor V se α e β recebem, ambas, valor V; caso contrário $\alpha \wedge \beta$ recebe valor F

C3: Uma fórmula $\alpha \vee \beta$ recebe valor V se pelo menos uma das duas fórmulas, α e β recebem valor V; caso contrário $\alpha \vee \beta$ recebe valor F

C4: Uma fórmula $\alpha \rightarrow \beta$ recebe valor V se pelo menos uma das duas fórmulas, $\neg\alpha$ e β recebem valor V; caso contrário $\alpha \rightarrow \beta$ recebe valor F.

7 Regras

7.0.1 Regras da negação

N1

$$\frac{\alpha}{\neg\neg\alpha}$$

N2

$$\frac{\neg\neg\alpha}{\alpha}$$

7.0.2 Regras conjuntivas

RC1

$$\begin{array}{c} \alpha \wedge \beta \\ \hline \alpha \\ \beta \end{array}$$

RC2

$$\begin{array}{c} \neg(\alpha \vee \beta) \\ \hline \neg\alpha \\ \neg\beta \end{array}$$

RC3

$$\begin{array}{c} \neg(\alpha \rightarrow \beta) \\ \hline \alpha \\ \neg\beta \end{array}$$

7.0.3 Regras disjuntivas

RD1

$$\begin{array}{c} \alpha \vee \beta \\ \hline / \quad \backslash \\ \alpha \qquad \beta \end{array}$$

RD2

$$\begin{array}{c} \neg(\alpha \wedge \beta) \\ \hline / \quad \backslash \\ \neg\alpha \qquad \neg\beta \end{array}$$

RD3

$$\begin{array}{c} \alpha \rightarrow \beta \\ \hline / \quad \backslash \\ \neg\alpha \qquad \beta \end{array}$$

7.0.4 Regras da equivalência

RDE1

$$\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\underline{\alpha \leftrightarrow \beta}} \\ / & \backslash \\ \neg\alpha & \beta \\ \neg\beta & \alpha \end{array}$$

RDE2

$$\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\underline{\neg(\alpha \leftrightarrow \beta)}} \\ / & \backslash \\ \alpha & \beta \\ \neg\beta & \neg\alpha \end{array}$$

7.1 Resumo Regras

Tabela 6: Regras Tableaux

N 1	N 2	RC1	RC2	RC3
α $\neg\neg\alpha$	$\neg\neg\alpha$ α	$\alpha \wedge \beta$ α β	$\neg(\alpha \vee \beta)$ $\neg\alpha$ $\neg\beta$	$\neg(\alpha \rightarrow \beta)$ α $\neg\beta$
RDE1	RDE2	RD1	RD2	RD3
$\alpha \leftrightarrow \beta$ / \\ $\neg\alpha$ β $\neg\beta$ α	$\neg(\alpha \leftrightarrow \beta)$ / \\ α β $\neg\beta$ $\neg\alpha$	$\alpha \vee \beta$ / \\ α β	$\neg(\alpha \wedge \beta)$ / \\ $\neg\alpha$ $\neg\beta$	$\alpha \rightarrow \beta$ / \\ $\neg\alpha$ β

8 Tableaux Semânticos

O método dos tablôs para lógica de primeira ordem é uma extensão do método para a lógica proposicional. Portanto, para se definir o método para a lógica de primeira ordem, conservam-se todas as regras (disj) e (conj) da lógica proposicional e acrescenta-se as seguintes regras: ragra universal (univ) e regra existencial (exis).

Regras da negação:

N1

$$\frac{V\ \neg\alpha}{F\ \alpha}$$

N2

$$\frac{F\ \neg\alpha}{V\ \alpha}$$

Regras conjuntivas:
RC1

$$\frac{V\ \alpha \wedge \beta}{\begin{array}{c} V\ \alpha \\ V\ \beta \end{array}}$$

RC2

$$\frac{F\ \alpha \vee \beta}{\begin{array}{c} F\ \alpha \\ F\ \beta \end{array}}$$

RC3

$$\frac{F\ \alpha \to \beta}{\begin{array}{c} V\ \alpha \\ F\ \beta \end{array}}$$

Regras disjuntivas
RD1

$$\begin{array}{ccc} & \underline{V\ \alpha \lor \beta} & \\ & / \qquad \backslash & \\ V\ \alpha & & V\ \beta \end{array}$$

RD2

$$\begin{array}{ccc} & \underline{F\ \alpha \land \beta} & \\ & / \qquad \backslash & \\ F\ \alpha & & F\ \beta \end{array}$$

RD3

$$\begin{array}{ccc} & \underline{V\ \alpha \to \beta} & \\ & / \qquad \backslash & \\ F\ \alpha & & V\ \beta \end{array}$$

Regras da equivalência
RDE1

$$\begin{array}{ccc} & \underline{V\ \alpha \leftrightarrow \beta} & \\ & / \qquad \backslash & \\ F\ \alpha & & V\ \beta \\ V\ \beta & & F\ \alpha \end{array}$$

RDE2

$$\begin{array}{ccc} & \underline{F\ \alpha \leftrightarrow \beta} & \\ & / \qquad \backslash & \\ V\ \alpha & & V\ \beta \\ F\ \beta & & F\ \alpha \end{array}$$

9 Dedução Natural

Definição 8 (Dedução)**.** *Sejam Γ um conjunto qualquer de fórmulas e φ uma fórmula. Uma dedução de φ a partir de Γ é uma sequência finita de fórmulas $\varphi_1, ..., \varphi_n$, tal que $\varphi_n = \varphi$ e cada φ_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, é uma fórmula que pertence a Γ ou foi obtida a partir de fórmulas que aparecem antes da sequência, por meio da aplicação de alguma regra de inferência.*

Definição 9 (Consequência Sintática)**.** *Sejam Γ um conjunto qualquer de fórmulas e φ uma fórmula. Dizemos que φ é consequência sintática de Γ (denotado por $\Gamma \vdash \varphi$) se há uma dedução de φ a partir de Γ*

Basicamente o método consiste em aplicar um conjunto de regras de inferência às premissas, gerando conclusões intermediárias às quais aplicam-se novamente as regras, até atingir-se a conclusão final desejada.

Esse processo pode ser denominado das seguintes maneiras: derivação ou inferência (prova) a partir de um conjunto de premissas.

Etapas de uma dedução natural:

1) escreve-se a lista de premissas enumerando-as e colocando como justificativa a seguinte expressão 'Pre' (que indica que tais fórmulas são premissas).

2) aplicam-se regras de inferência.

Obs.: Os sistemas de dedução natural não possuem, em geral, axiomas.

9.1 Regras de inferência

Podemos dividir as regras em dois grupos: um das regras que introduz conectivos e outro das regras de eliminação.

As fórmulas acima do traço são chamadas de conclusão e as fórmulas acima do traço são chamadas premissas.

Regras de introdução de connectivos

Introdução da Dupla Negação - IDN

$$\frac{\varphi}{\neg\neg\varphi}$$

Introdução da Conjunção - IC

$$\frac{\begin{array}{c}\varphi\\ \psi\end{array}}{\varphi \wedge \psi}$$

Expansão Exp (Introdução da Disjunção) ID

a)

$$\frac{\varphi}{\varphi \vee \psi}$$

b)

$$\frac{\psi}{\varphi \vee \psi}$$

Introdução do Bicondicional - IB

$$\frac{\begin{array}{c}\varphi \to \psi \\ \psi \to \varphi\end{array}}{\varphi \leftrightarrow \psi}$$

Regras de eliminação de conectivos:
Eliminação da Dupla Negação - EDN (eliminação da dupla negação)

$$\frac{\neg\neg\varphi}{\varphi}$$

Modus Ponens - MP (eliminação da implicação) EI

$$\frac{\begin{array}{c}\varphi \to \psi \\ \varphi\end{array}}{\psi}$$

Silogismo Disjuntivo - SD (eliminação da disjunção) ED
a)

$$\frac{\begin{array}{c}\varphi \vee \psi \\ \neg\varphi\end{array}}{\psi}$$

b)

$$\frac{\begin{array}{c}\varphi \vee \psi \\ \neg\psi\end{array}}{\varphi}$$

Simplificação (separação) - Simp (Sep) (Eliminação da Conjunção) EC
a)

$$\frac{\varphi \wedge \psi}{\psi}$$

b)

$$\frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}$$

Eliminação do Bicondicional - EB
a)

$$\frac{\varphi \leftrightarrow \psi}{\varphi \rightarrow \psi}$$

b)

$$\frac{\varphi \leftrightarrow \psi}{\psi \rightarrow \varphi}$$

9.2 Resumo das regras

Tabela 7: Regras Dedução Natural

IN	IDN	IC	ID	II	IB
Ver (*)	$\alpha \vdash \neg\neg\alpha$	$\alpha, \beta \vdash \alpha \wedge \beta$ $\alpha, \beta \vdash \beta \wedge \alpha$	$\alpha \vdash \alpha \vee \beta$ $\alpha \vdash \beta \vee \alpha$	Ver (**)	$\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \alpha \vdash \alpha \leftrightarrow \beta$ $\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \alpha \vdash \beta \leftrightarrow \alpha$
EN	EDN	EC	ED	EI	EB
Ver(*)	$\neg\neg\alpha \vdash \alpha$	$\alpha \wedge \beta \vdash \alpha$	$\alpha \vee \beta, \neg\alpha \vdash \beta$	$\alpha \rightarrow \beta, \alpha \vdash \beta$	$\alpha \leftrightarrow \beta \vdash \alpha \rightarrow \beta$

(*) $\{\gamma_1,\ \gamma_2,\ ...,\ \gamma_n\} \cup \{\alpha\} \vdash \bot \Rightarrow \{\gamma_1,\ \gamma_2,\ ...,\ \gamma_n\} \vdash \neg\alpha$
Obs.: para a regra de eliminação da negação, basta tomar como hipótese $\neg\alpha$.
(**) $\{\gamma_1,\ \gamma_2,\ ...,\ \gamma_n\} \cup \{\alpha\} \vdash \beta \Rightarrow \{\gamma_1,\ \gamma_2,\ ...,\ \gamma_n\} \vdash \alpha \rightarrow \beta$

Exemplo 1
$p_1 \wedge p_2, (p_1 \vee p_3) \rightarrow p_4 \vdash p_1 \wedge p_4$

1.	$p_1 \wedge p_2$	Pre.
2.	$(p_1 \vee p_3) \rightarrow p_4$	Pre.
3.	p_1	1, EC
4.	$p_1 \vee p_3$	3, SD
5.	p_4	2, 4, MP
6.	$p_1 \wedge p_4$	3, 5, IC

Q.E.D.

Exemplo 2
$(p \vee q) \wedge (r \vee s), (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow s), \neg r \vdash s$

1.	$(p \vee q) \wedge (r \vee s)$	Pre.
2.	$(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow s)$	Pre.
3.	$\neg r$	Pre.
4.	$p \vee q$	1. Sep.
4.	$r \vee s$	1, Sep.
5.	s	3, 4, SD

Q.E.D.

9.3 Regras de inferência hipotéticas

O conjunto de regras acima para o método de Dedução Natural ainda não é completo, ou seja, existem derivações válidas que não podem ser demonstradas usando-se apenas as regras apresentadas acima. 1. faltam as regras para quantificadores. 2. Faltam as regras adicionais para os conectivos proposicionais. As regras adicionais para conectivos proposicionais fará uso de *hipóteses*.

Exemplo:

Se Kropotkin é um anarquista típico, ele não gosta do estado institucionalizado. Se não gosta do estado institucionalizado, então não concorda com hierarquias. Logo, se Kropotkin é um anarquista típico, Kropotkin não concorda com as hierarquias.

Usaremos A, E e H para simbolizar respectivamente, 'x é um anarquista típico', 'x gosta do estado institucionalizado' e 'x concorda com as hierarquias'. Usaremos k para representar Kropotkin. Assim, o argumento acima pode ser formalizado da seguinte maneira:

$Ak \rightarrow \neg Ek, \neg Ek \rightarrow \neg Hk \vdash Ak \rightarrow \neg H$

Uma vez que não temos quantificadores e variáveis a dedução acima pode ser demonstrada usando-se tableau ou tabela de verdade. Contudo, as regras apresentadas anteriormente para dedução natural não são suficientes para demonstrar essa dedução.

Regra de prova condicional

1	γ_1	Pre.
2	γ_2	Pre.
.	.	.
.	.	.
.	.	.
j	$\mid \varphi$	H
.	$\mid$.	.
.	$\mid$.	.
.	$\mid$.	.
j + k	$\mid \psi$	.
j + k + 1.	$\varphi \to \psi$	j, $j + k$, RPC

Se, a partir de uma hipótese α, deriva-se uma fórmula β, então pode-se descartar α e introduzir $\alpha \to \beta$ na derivação.

Exemplo:

$Ak \to \neg Ek, \neg Ek \to \neg Hk \vdash Ak \to \neg H$

1.	$Ak \to \neg Ek$	Pre.
2.	$\neg Ek \to \neg Hk$	Pre.
3.	$\mid Ak$	H. $(? \neg Hk)$
4.	$\mid \neg Ek$	1, 3, MP
5.	$\mid \neg Hk$	2, 4, MP
6.	$Ak \to \neg Hk$	3, 5, RPC

Uma hipótese é uma suposição temporária. Nesse caso usaremos um traço vertical para indicar que estamos em um contexto hipotético. Segundo Mortari, essa hipótese pode ser pensada como sendo uma "fantasia". Podemos usar também a metáfora da "imaginação" ou do "pensamento". Todavia, uma pessoa c imaginar uma pessoa c_1 que, nessa imaginação, está imaginando algo. A imaginação da pessoa c_1 é imaginada pela pessoa c. Temos assim dois "níveis" de imaginação e um de "realidade". O mesmo pode acontecer se alguém sonhar que está sonhando.

Exemplo:

$Pa \to (Qb \to Fab) \vdash Qb \to (Pa \to Fab)$

A fórmula que se pretende demonstrar é um condicional, portanto podemos usar a estratégia da hipótese (ou da "imaginação" ou "fantasia").

1.	$Pa \to (Qb \to Fab)$	Pre.
2.	$\mid Qb$	H. $(?Pa \to Fab)$

Porém, no contexto hipotético fantasioso, deseja-se demonstrar um condicional. Portanto, deve-se introduzir mais um nível hipotético (uma hipótese dentro da hipótese ou uma imaginação dentro da imaginação).

Agora, deve-se continuar a derivação e tentar descartar as duas hipóteses usadas.

1.	$Pa \to (Qb \to Fab)$	Pre.
2.	$\mid Qb$	H. $(?Pa \to Fab)$
3.	$\mid \mid Pa$	H. $(?Fab)$

1.	$Pa \to (Qb \to Fab)$	Pre.
2.	$\mid Qb$	H. $(?Pa \to Fab)$
3.	$\mid \mid Pa$	H. $(?Fab)$
4.	$\mid \mid Qb \to Fab$	1, 3, MP
5.	$\mid \mid Fab$	2, 4, MP
6.	$\mid \ Pa \to Fab$	3, 5, RPC
7.	$Qb \to (Pa \to Fab)$	2, 6, RPC

Q.E.D.

9.4 Derivação indireta ou redução ao absurdo

Usamos a redução ao absurdo principalmente para demonstrar deduções com conclusões negativas (tipo $\neg\alpha$). Para tanto, introduz-se como hipótese a negação da conclusão (se a conclusão for uma negação, então será introduzida a afirmação da conclusão ou o equivalente da dupla negação da conclusão)

$\gamma_1, \gamma_2, ... \vdash \neg\varphi$

1	γ_1	Pre.
2	γ_2	Pre.
.	.	.
.	.	.
.	.	.
j	$\mid \varphi$	H (? $\perp$)
.	$\mid$.	.
.	$\mid$.	.
.	$\mid$.	.
j + k	$\mid \psi \wedge \neg\psi$	.
j + k + 1.	$\neg\varphi$	$j,\ j\ +\ k$, RRA

Se, a partir da hipótese φ, deriva-se uma contradição $\perp$, então pode-se descartar φ e introduzir $\neg\varphi$ na derivação.

10 Sistemas axiomáticos para o Cálculo Proposicional

Definição 10. *(Linguagem Formal)*

Uma linguagem formal é uma linguagem que pode ser completamente especificada sem fazer uso (direto ou indireto) do significado dos símbolos e sequência de símbolos (fórmulas) da linguagem que são utilizados.

Definição 11. *Uma prova em um sistema dedutivo* $\boldsymbol{S}$ *é uma sequência de fórmulas* α_1*,* α_2*,* α_3*, ...,* α_m *tal que: para cada* i*,* α_i *é um axioma de* $\boldsymbol{S}$ *ou é uma consequência direta de algumas das fórmulas precedentes resultante da aplicação de alguma regra de inferência de* $\boldsymbol{S}$*.*

Tomemos as definições 10 e 11.

Definimos S_1 como sendo um sistema axiomático para a lógica sentencial clássica. O sistema possui as propriedades definidas no capítulo sobre sistemas formais.

1. Os símbolos para S_1 são os conectivos primitivos $\neg$, $\rightarrow$ (obs. usaremos parênteses quando necessário para facilitar a leitura das fórmulas) e as variáveis sentenciais $\mathbf{Var}_{S_1}$ $= \{p, q, r, s, t, p_1, etc.\} = \mathbf{Var}_{LP}$.

2. Definição de fórmula em S_1 (o conjunto de fórmulas $\mathbf{For}_{S_1}$ será equivalente) ao conjunto de fórmulas $\mathbf{For}_{LP}$.

(a) Toda instância de variável sentencial é fórmula

(b) Se α e β são fórmulas, então $\neg\alpha$ e $\alpha \rightarrow \beta$ são fórmulas.

(c) fórmulas são definidas apenas pelos itens (a) e (b) e nada mais é fórmula.

3. Axiomas de S_1:

Sejam α, β e γ fórmulas.

Ax. 1 $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$

Ax. 2 $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$

Ax. 3 $(\neg\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow ((\neg\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha))$

4. A única regra de inferência de S_1 é o *modus ponens*: α, $\alpha \rightarrow \beta \vdash_{S_1} \beta$

Abreviamos algumas expressões de S_1 da seguinte forma:

D1 $\alpha \wedge \beta$ é a abreviação de $\neg(\alpha \rightarrow \neg\beta)$

D2 $(\alpha \vee \beta)$ é a abreviação de $\neg\alpha \rightarrow \beta$

D3 $\alpha \leftrightarrow \beta$ é a abreviação de $(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$

Teorema 1. $\alpha \rightarrow \alpha$

1. $(\alpha \rightarrow ((\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha))$ *Instância do esquema de axioma Ax2*

2. $\alpha \rightarrow ((\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha)$ *esquema de axioma Ax1*

3. $(\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$ *de 1 e 2 por MP (modus ponens)*

4. $\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$ *Ax1*

5. $\alpha \rightarrow \alpha$ *de 3 e 4 por MP*

Exercício 5. *Construa provas e demonstrações para os casos abaixo.*

1. $\vdash_{S_1} (\neg\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$

2. $\alpha \rightarrow \beta$*,* $\beta \rightarrow \gamma \vdash_{S_1} \alpha \rightarrow \gamma$

3. $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma) \vdash_{S_1} \beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$

10.1 Metateorema da dedução

É interessante observar aqui os dois níveis de discurso: i) o nível da linguagem objeto e ii) o nível da metalinguagem.

No nível da linguagem objeto (nossa linguagem formal acima definida) temos os conceitos de prova, teorema, etc. Já na metalinguagem poderemos usar também um outro tipo de conceito de prova (ou seja, metaprova). Nesse caso, não necessariamente trataremos de teoremas, mas sim de metateoremas. Por convenção chamaremos os metateoremas de *proposições*.

A primeira prova do metateorema da dedução[7] foi feita por A. Tarski em 1921 (cf. (Tarski 1923) p. 32), mas a primeira publicação desta (que também tinha a extensão para a primeira ordem) foi feita por Herbrand[8] em 1930 (cf. (Herbrand 1929), pub. 1930)[9].

Proposição 1 (Metateorema da Dedução)**.** *Se* Γ *é um conjunto de fórmulas,* α *e* β *são fórmulas e* $\Gamma,\ \alpha \vdash \beta$*, então* $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$*.*

Em outras palavras: se β é uma consequência sintática (no sistema **S**) do conjunto de premissas (ou hipóteses) $\Gamma \cup \{\alpha\}$, então $\alpha \to \beta$ é uma consequência (em **S**) do conjunto Γ.

Demonstração. Seja $\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3,\ \ldots,\ \beta_n$ uma prova de β a partir de $\Gamma \cup \{\alpha\}$, onde β_n é β. Provaremos por indução em i que $\Gamma \vdash \alpha \to \beta_i$ para $1 \leq i \leq n$.

Caso base:

Em primeiro lugar β_1 deve ser um axioma ou pertencer a Γ ou ser o próprio α. Pelo esquema de axioma 1 (Ax. 1), $\beta_1 \to (\alpha \to \beta_1)$ é um axioma. Nos casos anteriores, por MP (*modus ponens*), $\Gamma \vdash \alpha \to \beta_1$ (pelo teorema 1). Portanto, $\Gamma \vdash \alpha \to \beta_1$. Essa parte corresponde ao caso $i = 1$.

Hipótese de indução:

Assuma agora que $\Gamma \vdash \alpha \to \beta_k$ para todo $k < i$. Nesse caso a) β_i é um axioma ou b) $\beta_i \in \Gamma$ ou c) β_i é α ou d) β_i se segue por MP de algum β_j e β_l onde $j < i$ e $l < i$ e β_l tem a forma $\beta_j \to \beta_i$. Nos primeiros três casos $\Gamma \vdash \alpha \to \beta_i$ como no caso acima. Para o último caso teremos, por *hipótese de indução* $\Gamma \vdash \alpha \to \beta_j$ e $\Gamma \vdash \alpha \to (\beta_j \to \beta_i)$.

Conclusão:

Mas, pelo esquema de axioma (Ax. 2), $(\alpha \to (\beta_j \to \beta_i)) \to ((\alpha \to \beta_j) \to (\alpha \to \beta_i))$. Por MP $(\alpha \to \beta_j) \to (\alpha \to \beta_i)$ e novamente por MP $\Gamma \vdash \alpha \to \beta_i$. Logo, a prova por indução está completa. $\square$

Notemos que o esquema (Ax. 3) não é usado na prova do metateorema da dedução.

Corolário 1. *(a)* $\alpha \to \beta,\ \beta \to \gamma \vdash \alpha \to \gamma$*, (b)* $\alpha \to (\beta \to \gamma),\ \beta \vdash \alpha \to \gamma$

Demonstração. Parte (a)

Dessa forma, $\alpha \to \beta,\ \beta \to \gamma,\ \alpha \vdash \alpha \to \gamma$. Portanto, pelo metateorema da dedução (ver proposição 1), $\alpha \to \beta,\ \beta \to \gamma \vdash \alpha \to \gamma$

Para provar a parte (b), use o metateorema da dedução. $\square$

[7]A prova que está aqui apresentada foi baseada na demonstração que se encontra no livro E. Mendelson. Introduction to mathmatical logic

[8]Herbrand morreu em um acidente de montanhismo quando tinha apenas 23

[9]Ver também G. Hunter. Metalogic. p. 84

1.	$\alpha \to \beta$	Hip. (abreviação para hipótese)
2.	$\beta \to \gamma$	Hip.
3.	α	Hip.
4.	β	1, 3, MP
5.	γ	2, 4, MP

Lema 1. *Para todo $\alpha,\ \beta \in$ **For**$_{LP}$, as seguintes esquemas representam fórmulas que são teoremas do sistema S_1 definido acima.*

a) $\neg\neg\alpha \to \alpha$
b) $\alpha \to \neg\neg\alpha$
c) $\neg\alpha \to (\alpha \to \beta)$
d) $(\neg\beta \to \neg\alpha) \to (\alpha \to \beta)$
e) $(\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$
f) $\alpha \to (\neg\beta \to \neg(\alpha \to \beta\beta))$
g) $(\alpha \to \beta) \to ((\neg\alpha \to \beta) \to \beta$

Demonstração. a) $\neg\neg\alpha \to \alpha$

1.	$(\neg\alpha \to \neg\neg\alpha) \to ((\neg\alpha \to \neg\alpha) \to \alpha$	Ax. 3
2.	$\neg\alpha \to \neg\alpha$	Teorema 1
3.	$(\neg\alpha \to \neg\neg\alpha) \to \alpha$	1, 2, Corolário 1 b)
4.	$\neg\neg\alpha \to (\neg\alpha \to \neg\neg\alpha)$	Ax. 1
5.	$\neg\neg\alpha \to \alpha$	3, 4, Corolário 1 a)

b) $\alpha \to \neg\neg\alpha$
c) $\neg\alpha \to (\alpha \to \beta)$
d) $(\neg\beta \to \neg\alpha) \to (\alpha \to \beta)$
e) $(\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$
f) $\alpha \to (\neg\beta \to \neg(\alpha \to \beta\beta))$
g) $(\alpha \to \beta) \to ((\neg\alpha \to \beta) \to \beta$ □

10.2 Exercícios

Usando as definições, construções e resultados acima prove os seguintes teoremas:

a) $\alpha \to (\alpha \vee \beta)$
b) $\alpha \to (\beta \vee \alpha)$
c) $\beta \vee \alpha \to \alpha \vee \beta$
d) $\alpha \vee \beta \to \alpha$
e) $\alpha \vee \beta \to \beta$
f) $(\alpha \to \gamma) \to ((\beta \to \gamma) \to ((\alpha \vee \beta) \to \gamma)$
g) $((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to \alpha$
h) $\alpha \to (\beta \to (\alpha \wedge \beta)$

11 Referências

A maior parte do presente capítulo está baesada no livro: E. Mendelson. Introduction to mathematical logic.

Ver também Hunter, G. *Metalogic.* 1996

12 Valoração booleana, consequência semântica, satifatibilidade e conjuntos-verdade

For é o conjunto de todas as fórmulas da linguagem proposicional.

Seja α, $\beta \in$ **For** e $\Gamma \subseteq$ **For**

Obs: α, β e Γ são meta-variáveis para fórmulas e conjuntos de fórmulas.

Definição 12. *Por uma interpretação de uma fórmula α entende-se uma atribuição de valores de verdade a todas as variáveis que ocorrem em α.*

Definição 13. *uma valoração f_v de **For** é uma valoração booleana se, para quaisquer α, $\beta \in$ **For**, valem as seguintes condições.*

C1: Uma fórmula $\neg\alpha$ recebe valor V se α recebe valor F, e recebe F se α recebe valor V.

C2: Uma fórmula $\alpha \wedge \beta$ recebe valor V se α e β recebem, ambas, valor V; caso contrário $\alpha \wedge \beta$ recebe valor F

C3: Uma fórmula $\alpha \vee \beta$ recebe valor V se pelo menos uma das duas fórmulas, α e β recebem valor V; caso contrário $\alpha \vee \beta$ recebe valor F

C4: Uma fórmula $\alpha \to \beta$ recebe valor V se pelo menos uma das duas fórmulas, $\neg\alpha$ e β recebem valor V; caso contrário $\alpha \to \beta$ recebe valor F.

Definição 14 (Tautologia)**.** *α é uma tautologia sse α é verdadeira em todas as valorações booleanas de **For**.*

Definição 15 (Satisfatível)**.** *Um conjunto de fórmulas Γ é satisfatível sse existe pelo menos uma valoração booleana f_v na qual cada elemento de Γ é (simultaneamente) verdadeiro (diz-se que a valoração f_v satisfaz Γ).*

Exemplo 2. *Exemplos de conjuntos de fórmulas satisfatível:*

1. $\Gamma = \{\alpha\}$

2. $\Gamma = \{\alpha,\ \beta\}$

3. $\Gamma = \{\alpha,\ \alpha \wedge \beta,\ \neg\alpha \to (\alpha \wedge \beta)\}$

4. $\Gamma = \{(\alpha \wedge \neg\beta) \to \gamma, ((\alpha \vee \beta) \to (\neg\beta \vee \neg\gamma)) \to \alpha\}$

Proposição 2. *Uma fórmula α é satisfatível sse α é verdadeira em pelo menos uma valoração booleana.*

12.1 Modelos

Definição 16 (Modelo). *Uma função veritativa ou interpretação f_v é um modelo para uma fórmula α (ou conjunto de fórmulas Γ) em um sistema S see a fórmula α (ou toda fórmula do conjunto Γ) é verdadeira para f_v.*

Definição 17 (Conjunto consistente de fórmulas). *Uma fórmula α (ou conjunto de fórmulas Γ) é m-consistente (modelo-teorético) se α (ou Γ) possui algum modelo.*

Exemplo 3. *Exemplos de conjuntos consistentes de fórmulas:*
1. $\Gamma = \{\alpha\}$
2. $\Gamma = \{\alpha \vee \neg\alpha\}$
3. $\Gamma = \{\neg\alpha, \beta, \gamma, \lambda\}$
4. $\Gamma = \{(\alpha \wedge \neg\beta) \to \gamma, ((\alpha \vee \beta) \to (\neg\beta \vee \neg\gamma)) \to \alpha\}$

No contexto da lógica clássica, os conceitos de inconsistência, contradição e trivialidade são equivalente. Portanto podemos definir um conjunto Γ inconsistente (contraditório ou trivial) see não existem modelo algum para Γ.

Exemplo 4. *Exemplos de conjuntos inconsistentes de fórmulas:*
1. $\Gamma = \{\alpha,\ \neg\alpha\}$
2. $\Gamma = \{\beta,\ (\neg\beta \to \neg\alpha) \to \neg\beta\}$
3. $\Gamma = \{\neg(\beta \to \beta),\ (\neg\beta \to \neg\alpha) \to \neg\beta, \gamma\}$

12.2 Consequência semântica

Definição 18 (Consequência semântica). *Uma fórmula α é consequência semântica de um conjunto de fórmulas Γ se α é verdadeira em toda valoração que satisfaz Γ.*

Definição 19 (Consequência semântica - outra definição). *Seja Γ um conjunto de fórmulas de $\mathbb{L}$ e α uma fórmula de S_1. Diremos que α é consequência semântica de Γ (denotado por $\Gamma \models_{S_1} \alpha$) se para toda valoração f_v temos o seguinte:*
se $f_v(\beta) = V$ para todo $\beta \in \Gamma$, então $f_v(\alpha) = V$
se $\Gamma \models \alpha$ não vale, então escreveremos $\not\models \alpha$

De acordo com as definições acima, observe que:
1. Se α e $\alpha \to \beta$ são ambos verdadeiros para uma valoração f_v, então β para a essa mesma valoração f_v
2. Se $\models_S \alpha$ e $\models_S \alpha \to \beta$, então $\models_S \beta$
3. β é uma consequência semântica de α see $\alpha \to \beta$ é uma tautologia.

Exemplo 5. *Exemplos de consequência semântica:*
1. $\alpha \vee \beta,\ \neg\alpha \models \beta$
2. $\alpha,\ \beta \models \alpha \wedge \beta$
3. $\alpha,\ \alpha \to \beta \models \beta$
4. $\alpha,\ \neg\alpha \models \beta$ *para qualquer* β

5. $\models \alpha \leftrightarrow \neg\neg\alpha$
6. $\alpha \to \beta,\ \alpha \to \gamma \models \alpha \to (\beta \vee \gamma)$
7. $\alpha \to \beta,\ \beta \to \gamma,\ \alpha \models \gamma$
8. $\alpha \to \beta,\ \beta \to \gamma,\ (\alpha \to \delta) \to \alpha \models \gamma$
9. $\neg\alpha \wedge \beta,\ \beta \to (\gamma \to (\gamma \vee \alpha)),\ \gamma \vee \neg\beta \models \delta$

Observação 1. *A relação de consequência $\models$ tem as seguintes propriedades:*
1. Reflexividade: $\alpha \models \alpha$*;*
2. Se $\models \alpha$*, então* $\Gamma \models \alpha$*;*
3. Se $\alpha \in \Gamma$*, então* $\Gamma \models \alpha$*;*
4. Monotonicidade: se $\Delta \models \alpha$ *e* $\Delta \subseteq \Gamma$*, então* $\Gamma \models \alpha$*;*
5. Transitividade: se $\Gamma \models \alpha$ *e* $\alpha \models \beta$*, então* $\Gamma \models \beta$*;*
6. Corte: se $\Gamma \models \alpha$ *e* $\Delta,\ \alpha \models \beta$*, então* $\Gamma,\ \Delta \models \beta$*;*
7. Se $\Gamma,\ \alpha \models \beta$ *e* $\Gamma \models \alpha$*, então* $\Gamma \models \beta$
8. $\models \alpha$ *see, para todo* $\Gamma \neq \emptyset$, $\Gamma \models \alpha$
9. Teorema da dedução (forma semântica): $\Gamma,\ \alpha \models \beta$ *see* $\Gamma \models \alpha \to \beta$
10. $\Gamma \cup \{\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n\} \models \alpha$ *see* $\Gamma \models \alpha_1 \to (\alpha_2 \to (...(\alpha_n \to \alpha)...))$
11. $\Gamma \cup \{\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n\} \models \alpha$ *see* $\Gamma \models (\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge\ ...\ \wedge \alpha_n) \to \alpha$

Exercícios:

1. Determine se $(\alpha \leftrightarrow (\neg\beta \vee \gamma)) \to (\neg\alpha \to \beta)$ e $((\alpha \to (\beta \vee \gamma)) \vee (\alpha \to \beta)$ são tautologias.

Referência:

[**?**] Mendelson, E. Introduction to Mathematical Logic. pp. 17 e 18.

Definição 20 (Conjuntos-verdade)**.** *Seja* f_v *uma valoração booleana, e seja* Γ *o conjunto de todas as fórmulas que são verdadeiras sob* f_v*. Portanto o conjunto* Γ *obedece às seguintes condições:*

C1: Exatamente um dos elementos do par $(\alpha, \neg\alpha)$ *pertence a* Γ $((\neg\alpha \in \Gamma) \Leftrightarrow (\alpha \notin \Gamma))$

C2: $(\alpha \wedge \beta \in \Gamma) \Leftrightarrow (\alpha \in \Gamma)$ *e* $(\beta \in \Gamma)$

C3: $(\alpha \vee \beta \in \Gamma) \Leftrightarrow (\alpha \in \Gamma)$ *ou* $(\beta \in \Gamma$

C4: $(\alpha \to \beta \in \Gamma) \Leftrightarrow (\alpha \notin \Gamma)$ *ou* $\beta \in \Gamma$

Se um conjunto Γ *de fórmulas obedece às condições acima, então dir-se-á que* Γ *é saturado ou, ainda, que é um conjunto-verdade*

Proposição 3. *Se* f_v *é uma valoração arbitrária, e se* Γ *é o conjunto de todas as sentenças que são verdadeiras sob* f_v*, então são equivalentes as seguintes duas condições:*

C1: f_v *é uma valoração booleana,*

C2: Γ *é saturado.*

Definição 21 (Função característica)**.** *Seja* Γ *um conjunto de fórmulas de **For**. Seja uma função* f_{vcar} *que atribui a cada fórmula de* Γ *o valor* V *e* F *para cada fórmula que não está em* Γ*.* f_{vcar} *é denomida função característica do conjunto* Γ*.*

Proposição 4. Γ *é saturado sse* f_{vcar} *é uma valoração booleana.*

Proposição 5. Γ *é saturado sse* Γ *é o conjunto de todas as fórmulas verdadeiras sob alguma valoração booleana.*

Proposição 6. *Seja* $\Gamma^{\top}$ *o conjunto de todas as tautologias. Seja* Γ^{ver} *o conjunto de todos os conjuntos-verdade.* $\Gamma^{\top} = \bigcap \Gamma^{ver}$

Proposição 7. *Uma fórmula* α *é satisfatível sse* $\alpha \in \Gamma$ *para algum* $\Gamma \in \Gamma^{ver}$*.*

Corolário 2. *Seja* Γ^{sat} *o conjunto de todas as fórmulas satisfatíveis.* $\Gamma^{sat} = \bigcup \Gamma^{ver}$

Corolário 3. *Uma fórmula* α *é consequência semântica de um conjunto de fórmulas* Γ *sse* α *pertence a qualquer conjunto-verdade que inclui* Γ*.*

Portanto, não é necessário usar objetos como V ou F para se definir as noções semânticas básicas de um sistema. Essas noções podem ser definidas usando-se a noção de conjunto-verdade.

Conjuntos adequados de conectivos

Um conjunto Σ de conectivos é dito um conjunto adequado de conectivos se as funções de verdade associadas a eles bastam para representar qualquer outra função de verdade.

Exemplos:
$\Sigma_1 = \{\wedge,\ \vee,\ \neg\}$
$\Sigma_2 = \{\rightarrow,\ \neg\}$
$\Sigma_3 = \{\vee,\ \neg\}$
Exercício: Mostrar que $\Sigma_1,\ \Sigma_2\ e\ \Sigma_3$ são conjuntos adequados de conectivos.
Os conjuntos Σ_4 e Σ_5:
$\Sigma_4 = \{\leftrightarrow,\ \neg\}$
$\Sigma_5 = \{\wedge,\ \vee\}$
não são conjuntos adequados de conectivos.

Sheffer ou NAND

$(p\ NAND\ q) = 1$ see p e q não são simultaneamente 1
$\neg p = (p\ NAND\ p)$
$p \vee q = ((p\ NAND\ p) NAND (q\ NAND\ q))$

O conectivo NOR

$(p\ NOR\ q) = 1$ see p e q não são simultaneamente 0
$\neg p = (p\ NOR\ p)$
$p \wedge q = ((p\ NOR\ p) NOR (q\ NOR\ q))$

Proposição 8. *Os conjuntos* Σ_6 *e* Σ_7*:*
$\Sigma_6 = \{NAND\}$
$\Sigma_7 = \{NOR\}$
são conjuntos adequados de conectivos.

Teorema 2 (O teorema de interpolação para a lógica proposicional clássica)**.** *Se* $\models \alpha \to \beta$ *e* α *e* β *têm ao menos um símbolo em comum, então existe uma fórmula* $\gamma \in$ ***For*** *t.q. todos os seus símbolos proposicionais ocorrem em* α *e* β*. Nesse caso:* $\models \alpha \to \gamma$ *e* $\models \gamma \to \beta$

Demonstração. 1. Suponha que todos os símbolos proposicionais que ocorrem em α também ocorrem em β. Nesse caso o teorema vale, uma vez que se $\gamma = \alpha$, a fórmula γ em questão será o próprio α, e, portanto $\models \alpha \to \alpha$ e $\models \alpha \to \beta$, ou seja, $\models \alpha \to \gamma$ e $\models \gamma \to \beta$.

2. Suponha agora que existe ao menos um símbolo proposicional que ocorre em α e não ocorre em β. Seja p esse símbolo. Por hipótese, $\alpha \to \beta$ é válido. Portanto, $\alpha \to \beta$ tem valor de verdade V quando p é V e tem valor V quando p tem valor F. Seja q um símbolo proposicional que ocorre em α e em β. Sejam α_1 a fórmula que resulta de α quando toda ocorrência de p em α é substituída por $q \to q$ e α_2 a fórmula que resulta de α quando toda ocorrência de p em α é substituída por $\neg(q \to q)$. Nesse caso, tanto $\alpha_1 \to \beta$ quanto $\alpha_2 \to \beta$ são logicamente válidos. É possível mostrar, através da tabela de verdade que: $\alpha \to (\alpha_1 \vee \alpha_2)$ é tautologia. Como $\alpha_1 \to \beta$ e $\alpha_2 \to \beta$ são ambas válidas, temos que $(\alpha_1 \vee \alpha_2) \to \beta$ é tautologia. Para que tais fórmulas sejam escritas com síbolos primitivos basta definirmos: $(\alpha \vee \beta) \stackrel{def}{=} (\neg\alpha \to \beta)$. Se $\alpha \to \beta$, então existe $\gamma = (\neg\alpha_1 \to \alpha_2)$ tal que $\models \alpha \to (\alpha_1 \vee \alpha_2)$ e $\models (\alpha_1 \vee \alpha_2) \to \alpha$ e os símbolos proposicionais de γ ocorrem em α e em β.

3. Se existir mais de um símbolo proposicional que ocorre em α e não ocorre em β então, para cada símbolo que ocorre em α e não ocorre em β escolheremos uma variável proposicional diferente e fazemos α_1 e α_2 tal como descrito acima. $\square$

13 Formas Normais

É possível padronizar as fórmulas de um sistema lógico proposicional. As fórmulas obtidas dessa padronização possuem uma mesma estrutura (*forma normal*). As fórmulas escritas nesse padrão são semanticamente equivalentes às fórmulas originais.

Sejam $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \ldots,\ \alpha_n$ fórmulas de **For**. Usaremos $\bigwedge\limits_{i=1}^{n} \alpha_i$ e $\bigvee\limits_{i=1}^{n} \alpha_i$ para abreviar fórmulas da seguinte maneira:

$$\bigwedge_{i=1}^{n} \alpha_i = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 \wedge \ldots \wedge \alpha_n$$

$$\bigvee_{i=1}^{n} \alpha_i = \alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \alpha_3 \vee \ldots \vee \alpha_n$$

Por convenção:

$$\bigwedge_{i=1}^{1} \alpha_i = \bigvee_{i=1}^{1} \alpha_1 = \alpha_1$$

Definição 22. *Cláusula: é uma fórmula* γ *com a seguinte forma (estrutura):* $\gamma = \bigwedge\limits_{i=1}^{n} \alpha_i$ *onde cada* α_i *é um literal e* $n \geq 1$*.*

Exemplo 6. *E1: Exemplos de literais:* $p_1,\ \neg p_1, r_{47}, \neg s_{51}$. *E2: Exemplos de cláusulas:* $p_1 \wedge \neg p_1,\ p_6, r_2 \wedge r_3 \wedge r_4$

Definição 23 (Forma normal disjuntiva (FND))**.** *Dizemos que uma fórmula* γ *qualquer está na forma normal disjuntiva se* γ *é da forma:* $\bigvee_{i=1}^{n} \alpha_i$ *onde cada* α_i *é uma cláusula e* $n \geq 1$.

Exemplo 7 (Exemplos de fórmulas em FND:)**.** *Sejam as* $\alpha_1,\ \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ *e* α_5 *cláusulas. Por exemplo* $\alpha_1 = p_1 \wedge \neg p_1,\ \alpha_2 = p_6,\ \alpha_3 = r_2 \wedge r_3 \wedge r_4,\ \alpha_4 = s_2 \wedge \neg p_3,\ \alpha_5 = \neg p_5 \wedge \neg r_5 \wedge \neg s_5$ *Então:* $\beta = \bigvee_{i=1}^{3} \alpha_i = \alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \alpha_3$ *é uma fórmula escrita em FND. Usando as cláusulas* $\alpha_1, \ldots, \alpha_5$ *de outros exemplos de fórmulas escritas em FND*

Proposição 9. *Toda fórmula* α *de* S_1 *admite uma forma normal disjuntiva. Isto é, existe uma fórmula* γ*, que contém as mesmas variáveis que* α*, tal que* γ *está em FND e* $\alpha \leftrightarrow \gamma$*. Além disso, existe um algoritmo para se calcular uma FND* γ *para* α*.*

Demonstração. Suponhamos que $p_1, \ldots, p_n$ são (exatamente) todas as variáveis que ocorrem em α.

Construímos a tabela-verdade de α utilizando apenas as variáveis $p_1, \ldots, p_n$.

Se α é uma contradição, definimos $\gamma = \bigvee_{j=1}^{n} (q_j \wedge \neg q_j)$. Obviamente γ está em FND, possui as mesmas variáveis que α e é uma contradição, portanto $\alpha \leftrightarrow \gamma$ para esse caso.

Se α não é uma contradição, dentre as 2^n linhas da tabela-verdade, escolha apenas as linhas em que α recebe o valor 1 (deve existir ao menos uma, pois α não é uma contradição).

Chamaremos $L_1, \ldots, L_k$ as linhas em que α vale 1 (note que $1 < K < 2^n$). Para cada linha L_m, t.q. $1 \leq m \leq K$ defina os seguintes literais:

$$\alpha_j^m \begin{cases} q_j \text{ se } q_j \text{ recebe valor 1 na linha } L_m \\ \neg q_j \text{ c.c.} \end{cases}$$

Considere agora, para cada $m \in \{1, \ldots, k\}$, a cláusula $\alpha_m = \bigwedge_{m=1}^{k} \alpha_j^m$.

Finalmente, definimos: $\gamma = \bigvee_{m=1}^{k} \alpha_m$.

Resta provar que $\alpha \leftrightarrow \gamma$ (pois γ está em FND).

Seja uma valoração v tal que $v(\alpha) = 1$. Logo, v corresponde a uma das linhas da tabela-verdade (digamos L_i) construída para α.

Por construção dos literais α_j^m, temos que $v(\alpha_j^m) = 1$ para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$. Com efeito, se $v(q_j) = 1$, então $\alpha_j^m = q_j$, portanto $v(\alpha_j^m) = 1$.

Por outro lado, se $v(q_j) = 0$, então $\alpha_j^m = \neg q_j$, portanto $v(\alpha_j^m) = 1$.

Assim sendo, temos que $v(\alpha_i) = 1$, pois α_i consiste da conjunção dos α_j^m onde $j \in \{1, \ldots, n\}$. Portanto, $v(\gamma_i) = 1$, pois γ é uma disjunção de fórmulas, dentre elas α_i, sendo que $v(\alpha_i) = 1$.

Reciprocamente, suponha que v seja uma valoração tal que $v(\gamma) = 1$. Pela definição da tabela de disjunção, deve haver pelo menos um índice i tal que $v(\alpha_i = 1$, portanto $v(\alpha_j^m) = 1$ para todo $j \in \{1, \dots, n\}$ (pela definição da tabela da conjunção).

Inferimos que o valor dado por v para as variáveis $q_1, \dots, q_n$ coincide com o valor dado por v para elas na linha L_i da tabela-verdade de α, pela construção dos literais α_j^m. Portanto o valor de α (na linha L_i) coincide com $v(\alpha)$, pela definição de equivalência lógica.

Logo, $v(\alpha) = 1$, pois L_i é uma das linhas em que α recebe o valor 1.

Concluímos então que $\alpha = \gamma$ □

14 Corretude e completude

Metateorema 1 (Corretude)**.** *A LPC é é correta, ou seja,* $\Gamma \vdash \alpha$ *implica* $\Gamma \models \beta$

Segundo Church 1956, um sistema é dito completo se tudo o que é teorema neste sistema é o que gostaríamos que fosse teorema. Essa é uma noção de completude puramente sintática. Do ponto de vista da semântica a completude significa que os teoremas de um sistema não entram em conflito com o conjunto de interpretações deste (ver [**?**]).

Definição 24 (Sistema completo para uma linguagem)**.** *Um sistema* $\mathcal{L}$ *para uma linguagem* Σ *é completo com respeito à classe todas as tautologias vero-funcionais see: (1)* Σ *é adequada para expressar qualquer função de verdade. (2) Toda tautologia de* Σ *é um teorema de* $\mathcal{L}$

Observação 2. *Em geral, na literatura, as provas de completudes partem do pressuposto que a linguagem é adequada para expressar qualquer função de verdade. Dessa forma, essa provas têm por objetivo mostrar que o item (2) da definição 24 vale.*

Definição 25. $\mathcal{L}$ *é semanticamente completo (ou completo) see toda fórmula logicamente válida em* $For^{\mathcal{L}}$ *é um teorema de* $\mathcal{L}$

Diferentes provas de completude para a lógica proposicional clássica: Post (1920), Łukasiewicz (1929), László Kalmár (1935), W. V. Quine (1937), Leon Henkin (1947), Kurt Shütte (1954), Alan Ross Anderson e Nuel Belnap (1959).

14.1 A prova de completude de Post para LPC

A prova de post está baseada na formulação de Whitehead-Russell da lógica proposicional.

Resumo da prova de Post

(1) Post mostrou que toda fórmula pode ser reescrita usando-se a forma normal disjuntiva (FND). Em outros termos, $\forall \alpha \in \textbf{For}\ \exists \alpha_{FND} \in \textbf{For}$ t.q $\vdash \alpha \leftrightarrow \alpha_{FND}$ e α_{FND} está em FND.

(2) Post apresentou um método efetivo para provar na lógica proposicional qualquer tautologia da LPC que está em FND.

14.2 A prova de completude de Kalmár para LPC

Essa prova foi originalmente demonstrada por László Kalmár em 1935.

Para essa prova, é necessário mostrar que as seguintes fórmulas são teoremas da lógica proposicional:

1. $\alpha \to \alpha$
2. $\alpha \to (\beta \to \alpha)$
3. $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$
4. $\neg\alpha \to (\alpha \to \beta)$
5. $\alpha \to \neg\neg\alpha$
6. $\alpha \to (\neg\beta \to \neg(\alpha \to \beta))$
7. $(\alpha \to \beta) \to ((\neg\alpha \to \beta) \to \beta)$

Uma prova no estilo da prova de Kalmár vale em todo sistema em que as fórmulas acima e todas as fórmulas que seguem esses esquemas são teoremas e vale a regra de Modus Ponens.

Lema 2 (Lema para a prova de completude)**.** *Seja α uma fórmula qualquer de LPC tal que as únicas variáveis proposicionais distintas são: $p_1, ..., p_k$ onde $(k \geq 1)$. Seja v uma valoração (interpretação) arbitrária de LPC. Portanto, v atribui valores de verdade às variáveis proposicionais de α. Definiremos p_i^v da seguinte forma:*

Se v associa V à variável p_i, p_i^v será a própria P_i.

Se v associa F à variável p_i, p_i^v será a própria $\neg P_i$.

Do mesmo modo, seja $\alpha^v = \alpha$ ou $\alpha^v = \neg\alpha$ conforme o valor de α seja V ou F em v respectivamente, então: $p_1^v, ..., p_k^v \vdash_{LPC} \alpha^v$.

14.3 A prova de completude de Henkin para LPC

O método de prova de Henkin para a LPC é vantajoso pois: (1) esse método é essencialmente o mesmo (mas um pouco mais simples) que o método para a prova de completude da lógica de predicados. (2) A prova faz uso de novas noções (um cojunto maximalmente consistente) que possui utilidade para outras áreas das ciências formais. (3) Dois metateoremas importantes devem ser estabelecidos para se fazer tal prova: o lema de Lindenbaum para LPC e o teorema que diz que todo conjunto consistente de LPC tem um modelo. O teorema usará as partes (a), (b), (c) e (d) abaixo e será estabelecido em (e).

(a) Algumas fórmulas que são teoremas de LPC

Sejam α, β, $\gamma \in \mathbf{For}^{LPC}$. Os seguintes esquemas de fórmulas são esquemas de teoremas de LPC.

1. $\alpha \to \alpha$

2. $\alpha \to (\beta \to \alpha)$

3. $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$

4. $\neg\alpha \to (\alpha \to \beta)$

5. $\alpha \to (\neg\beta \to \neg(\alpha \to \beta))$

6. $(\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \neg\beta) \to \neg\alpha)$

7. $(\neg\alpha \to \beta) \to ((\neg\alpha \to \neg\beta) \to \alpha)$

Além disso, o seguinte metateorema vale (para qualquer $\delta \in \mathbf{For}^{LPC}$): se $\alpha,\ \beta \vdash \gamma$ e $\alpha,\ \gamma \vdash \delta$, então $\alpha,\ \beta \vdash \delta$

(b) Conjuntos consistente, maximais consistentes e alguns teoremas sobre eles

A definição 17 determina quando um conjunto de fórmula pode ser consisderado consistente.

Metateorema 2. *Seja* $\Gamma \subseteq$ ***For***. Γ *é consistente see* $\neg\exists\alpha \in$ ***For*** *t. q.* $\Gamma \vdash \alpha$ *e* $\Gamma \vdash \neg\alpha$

Metateorema 3. *Se o conjunto de fórmulas* Γ *tem um modelo, então* Γ *é consistente.*

Demonstração. Seja $\Gamma \subseteq$ **For** um conjunto qualquer de fórmulas. Suponha que Γ tem modelo, mas é inconsistente. Portanto, para algum $\alpha \in$ **For**, $\Gamma \vdash \alpha$ e $\Gamma \vdash \neg\alpha$ De acordo com o metateorema 1, $\Gamma \models \alpha$ e $\Gamma \models \neg\alpha$. Dessa forma, todo modelo f_v de Γ é modelo de α e todo modelo Γ é modelo de $\neg\alpha$. Por hipótese, Γ tem modelo e nesse modelo vale α e vale $\neg\alpha$, mas isso é absurdo. Portanto, se Γ tem modelo, Γ é consistente. □

A conversa do metateorema 3, apesar de muito interessante, é muito complicado de se provar.

Metateorema 4. $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ *é inconsistente see* $\Gamma \vdash \alpha$

Metateorema 5. $\Gamma \cup \{\alpha\}$ *é inconsistente see* $\Gamma \vdash \neg\alpha$

Definição 26 (Conjunto maximal consistente de fórmulas)**.** $\alpha^v = \alpha$ Γ *é um conjunto maximal consistente de fórmulas see* Γ *é consistente e se* $\alpha \in$ ***For***, *então* $\alpha \in \Gamma$ *ou* $\Gamma,\ \alpha \vdash \beta$ *e* $\Gamma,\ \alpha \vdash \neg\beta$ *para algum* $\beta \in$ ***For***

Metateorema 6. *Se* Γ *é maximal consistente e* $\alpha \in$ ***For***, *então apenas uma das duas seguintes fórmulas* α *e* $\neg\alpha$ *está em* Γ

Metateorema 7. *Seja* Γ *um conjunto maximal consistente e* α *uma fórmula. Se* $\Gamma \vdash \alpha$, *então* $\alpha \in \Gamma$

(c) teorema de enumeração para For

Metateorema 8. ***For*** *é efetivamente enumerável.*

(d) Lema de Lindenbaum

Lema 3 (Lema de Lindenbaum)**.** *Todo conjunto consistente pode ser estendido para um conjunto maximal consistente.*

(e) a prova de completude para LPC

Metateorema 9. *Todo conjunto consistente de fórmulas de LPC tem modelo.*

Metateorema 10 (A completude "forte" para LPC)**.** *Se* $\Gamma \models \alpha$*, então* $\Gamma \vdash \alpha$*.*

Metateorema 11 (O teorema de completude para LPC)**.** *Se* $\models \alpha$*, então* $\vdash \alpha$*.*

14.4 Compacidade

Metateorema 12. *Se* $\Gamma \models \alpha$*, então* $\exists \Delta^{fin} \subseteq \Gamma$ *t. q.* $\Delta^{fin} \models \alpha$*.*

Metateorema 13. *Para todo* $\Gamma_i^{fin} \subseteq \Gamma$*, se* Γ_i^{fin} *é consistente, então* Γ *é consistente.*

Metateorema 14 (Teorema da compacidade)**.** *Para todo* $\Gamma_i^{fin} \subseteq \Gamma$*, se* Γ_i^{fin} *tem modelo, então* Γ *tem modelo.*

Metateorema 15 (Teorema de interpolação para LPC)**.** *Se* $\vdash \alpha \to \beta$*, e* α *e* β *têm ao menos um símbolo proposicional em comum, então existe uma fórmula* $\gamma \in \boldsymbol{For}^{LPC}$ *no qual todos os seus símbolos proposicionais ocorrem em* α *ou em* β *t. q.* $\alpha \vdash \gamma$ *e* $\gamma \vdash \beta$

Fontes e leituras complementares:
[**?**]
Carnielli, W; Coniglio, M e Bianconi.R. Lógica e aplicações: matemática, ciência da computação e filosofia. Apostila em construção. 2006

Além dos textos citados acima, esta apresentação foi constituição a partir das seguinte referências bibliográficas: [**?**], [Men97], [Hun73].

Referências

[BMG06] J. Branquinho, D. Murcho, and N. G. Gomes. *Enciclopédia de termos lógico-filosóficos.* . Martins Fontes, São Paulo, 2006.

[Hun73] Geoffrey Hunter. *Metalogic, An Introduction to the Metatheory of Standard First Order Logic.* University of California Press, Berkley and Los Angeles, 1973.

[Kei92] Chen Chung Chang & H. J. Keisler. *Model theory*, volume 73 of *Estudies in Logic and the fundations of matheamatics.* North-Holland, Amsterdam, 1992.

[Men97] Elliott Mendelson. *Introduction to Mathematical Logic.* Chapman & Hall, London, Weinheim, New York, Tokio, Melburn, Madras, 1997.

[Smu95] R.M. Smullyan. *First-order Logic.* Dover books on advanced mathematics. Dover, 1995.