Lógica de Primeira Ordem - Linguagem - Parte 1

Samir Gorsky

Lógica de Primeira Ordem - Linguagem

Introdução

Lógica de Primeira Ordem - Linguagem

Px significa que x tem a propriedade P

$\forall xPx$ significa que a propriedade P vale para todo x.

$\exists xPx$ significa que algum x tem a propriedade P ou existe um x que tem a propriedade P.

Lógica de Primeira Ordem - Linguagem

'$\forall$' é chamado de quantificador universal.

'$\exists$' é chamado quantificador existencial.

Lógica de Primeira Ordem - Linguagem

Linguagem Formal para a Lógica de Primeira Ordem

Lógica de Primeira Ordem - Linguagem

- Conectivos: $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$,
- Quantificadores: $\forall$, $\exists$
- Variáveis individuais: $x, y, w, z, x_1, y_1, ..., z_n, ...$
- Símbolos de constantes individuais: $a, b, c, d, a_1, b_1, ..., d_n, ...$ (este conjunto pode ser vazio)
- Símbolos de predicado: $A, B, C, ..., P, Q, R, S, ..., Z, A_1, ...P_1, ..., S_n, ...$ (este conjunto não pode ser vazio)
- Símbolos de função: $f, g, h, f_1, ..., h_n, ...$ (este conjunto pode ser vazio)

Lógica de Primeira Ordem - Linguagem

Constantes individuais: usadas para designar indivíduos determinados (análogo a nomes).

Variáveis individuais: usadas para designar indivíduos indeterminados (possuem significado a partir de um domínio de variação *range*).

Lógica de Primeira Ordem - Linguagem

Símbolos para propriedades e relações: são usados para representar propriedades e relações.

Lógica de Primeira Ordem - Linguagem

Símbolos de funções: representam funções e operações no domínio especificado.

Lógica de Primeira Ordem - Linguagem

Símbolos de predicado e símbolos de funções poderão ter a aridade indicada como índice superior.

Lógica de Primeira Ordem - Linguagem

Linguagem de Primeira Ordem: termos

1. Variáveis e constantes individuais são termos.
2. Se f é um símbolo de função de aridade n e $t_1, ..., t_n$ são termos, então $f(t_1, ..., t_n)$ é termo.
3. Uma expressão é um termo somente se puder ser mostrada com base nas regras 1 e 2 acima.

Lógica de Primeira Ordem - Linguagem

Linguagem de Primeira Ordem: fórmulas bem-formadas (FBF)

1. Toda fórmula atômica é FBF. (Fórmula atômica: símbolos de predicados n-ários aplicados a n termos forma uma fórmula atômica)
2. Se φ e ψ são FBF e v uma variável, então $\neg\varphi$, $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \rightarrow \psi$, $\varphi \leftrightarrow \psi$, $\forall v \varphi$, $\exists v \varphi$ são FBF.
3. Uma expressão é um FBF somente se puder ser mostrada que é FBF com base nas regras 1 e 2 acima.

Lógica de Primeira Ordem - Linguagem

Linguagem de Primeira Ordem

Na fórmula $\forall x\varphi$, 'φ' é chamado escopo do quantificador '$\forall x$'

Lógica de Primeira Ordem - Linguagem

Linguagem de Primeira Ordem

A ocorrência de uma variável é denominada “ligada” em uma FBF φ se ocorre em um quantificador $\forall x$ em φ ou está dentro do escopo de um quantificador $\forall x$ em φ. Caso contrário, a ocorrência da variável é denominada livre.

Exemplos

Exemplos -Frases

Exemplos

Lógica de Primeira Ordem - Linguagem

Exemplos de Argumentos

Lógica de Primeira Ordem - Linguagem

Existem vários tipos de inferência lógica que não podem ser justificadas com base no cálculo proposicional:

Inferência 1:

Todo amigo de Pedro é amigo de João
Martinho não é amigo de joão
Logo, Martinho não é amigo de Pedro.

Lógica de Primeira Ordem - Linguagem

A inferência 1 pode ser representada formalmente da seguinte maneira:

$\forall x(Axp \rightarrow Axj)$
$\neg(Amj)$

$\neg(Amp)$

Onde, 'Axy' significa 'x é amigo de y' e 'p', 'j' e 'm' são os indivíduos Pedro, João e Martinho.

Lógica de Primeira Ordem - Linguagem

Inferência 2:

Todo ser humano é racional.
Alguns animais são seres humanos.
Logo, alguns animais são racionais.

Lógica de Primeira Ordem - Linguagem

A inferência 2 pode ser representada formalmente da seguinte maneira:

$\forall x(Hx \rightarrow Rx)$
$\exists x(Ax \wedge Hx)$

$\exists x(Ax \wedge Rx)$

Onde 'H', 'R' e 'A' designam as propriedades Ser Humano, Racional e Animal.

Lógica de Primeira Ordem - Linguagem

Inferência 3:

O sucessor de um número inteiro par é impar.
2 é um inteiro par.
Logo, o sucessor de 2 é impar.

Lógica de Primeira Ordem - Linguagem

A inferência 3 pode ser representada formalmente da seguinte maneira:

$\forall x((Zx \wedge Px) \rightarrow Is(x))$
$Zd \wedge Pd$

$Is(d)$

Onde 'Z', 'P' e 'I' designam, respectivamente, Inteiro, Par e Impar; '$s(x)$' é a função sucessor e 'd' denota o número 2.

Lógica de Primeira Ordem - Linguagem

A correção dos argumentos acima se deve não somente ao valores de verdade das sentenças, mas ao significado dos termos “todos”, “algum”, etc.

Lógica de Primeira Ordem - Linguagem

A validade dos argumentos acima não depende dos significados particulares dos símbolos 'A', 'H', 'R', 'p', 'j' , 'm', 's', 'b', etc.

Referências

Mendelson, E. Introduction to Mathematical Logic. [Men97]

Alonzo Church.
Introduction to mathematical Logic.
Princeton University Press, New Jersey, 1956.

Elliott Mendelson.
Introduction to Mathematical Logic.
Chapman & Hall, London, Weinheim, New York, Tokio, Melburn, Madras, 1997.

C.A. Mortari.
Introdução à lógica.
UNESP, 2001.